



TITLE:

準2次元波状後流の形成(波の非線形現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

池畑, 義人; 本地, 弘之; 杉原, 祐司

CITATION:

池畑, 義人 ...[et al]. 準2次元波状後流の形成(波の非線形現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1996, 949: 139-147

ISSUE DATE:

1996-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60296>

RIGHT:

準 2 次元波状後流の形成

九州大学大学院総合理工学研究科 池畑 義人 (Yoshito IKEHATA)
本地 弘之 (Hiroyuki HONJI)
杉原 裕司 (Yuji SUGIHARA)

1. はじめに

一様流の中におかれた物体の下流にできるカルマン渦列については古くから数多くの研究がなされており、物体表面にできた境界層の剥離がその成因であるといわれている。しかしながら、一様な速度で流れる電解溶液中に、局所磁場と定電流の相互作用により生ずるローレンツ力を流れとは逆向きに作用させた場合、流体中に物体が存在しなくとも、その下流にカルマン渦列に類似した渦列が形成することが Honji¹⁾によって報告されている。また、Honji & Haraguchi²⁾は可視化実験によって、このような渦列の形態と性質が無次元ローレンツ力とレイノルズ数の2つのパラメータで分類でき、ストローハル数が円柱後方に生ずるカルマン渦列に比べて約半分の値を取ることを明らかにした。本研究では、これらの実験で用いた水槽に比べて、渦対とその後流の観察に有利な水槽を製作し、流れの可視化実験を行ったので、その結果について報告する。また、このようなローレンツ力で誘起される流れの実験では、磁場の到達距離の制約から、非常に水深の浅い特殊なセットアップを用いることになり、そのため流れの定式化には準2次元近似が有効となる³⁾。そこで、準2次元近似された流れ関数-渦度方程式による数値計算を行い、現象のシュミレートを試みた。

2. 実験

2-1. 実験装置

実験には、図1に示すような装置を用いた。この装置は、幅30cmのゴムベルトを環状にし、それを流体中でベルトコンベアのように1.0cm/sec前後の速度で回転させて一様流を発生させるものである。ここでは、上部のゴムベルトを水槽の底面とし、流体層とは、その上にある作業流体(濃度1.0%の NaHCO_3 水溶液)を示す。その厚さは1.0cmに固定された。水槽の底面に直径2.0cmの永久磁石(0.2T)を置いて、水槽の両側壁に電極を設置し、一様流の流れる方向と逆向きにローレンツ力が発生するように定電流を印加した。トレーサとして細かく砕いたポリスチレンビーズを浮かべ、スライドプロジェクターによるスリット光を入射して水表面での流れの挙動を可視化した。また、可

視化した流れは水槽上方から 35mm カメラで撮影した。

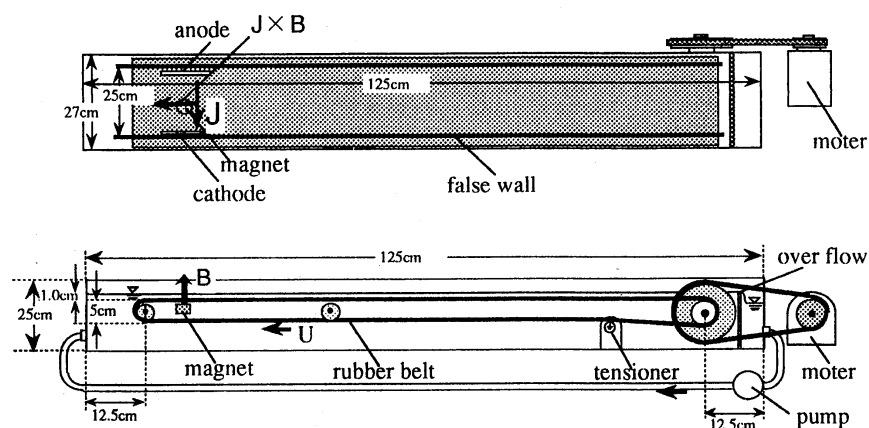


図1 実験装置図

2-2. 可視化実験

この水槽でつくられる流れの代表的な3つのパターンを図2～図4に示す。無次元パラメータ Re 、 Rh 、 Q については3-1で述べる。図2のケースでは一様流に比べてローレンツ力が弱く、その結果ローレンツ力で引き起こされるべき逆流域が吹き流されている。図3では、磁石の上に逆流域ができ、ほぼ左右対称な渦対が形成されていることがわかる。図4は、ローレンツ力によって形成された渦対が不安定化して非対称になり、渦対から渦がはがされている様子を示している。渦対の左右の渦は交互に大きくなったり小さくなったりを周期的に繰り返し、その下流にはカルマン渦列のように千鳥状に渦が並んでいることがわかる。

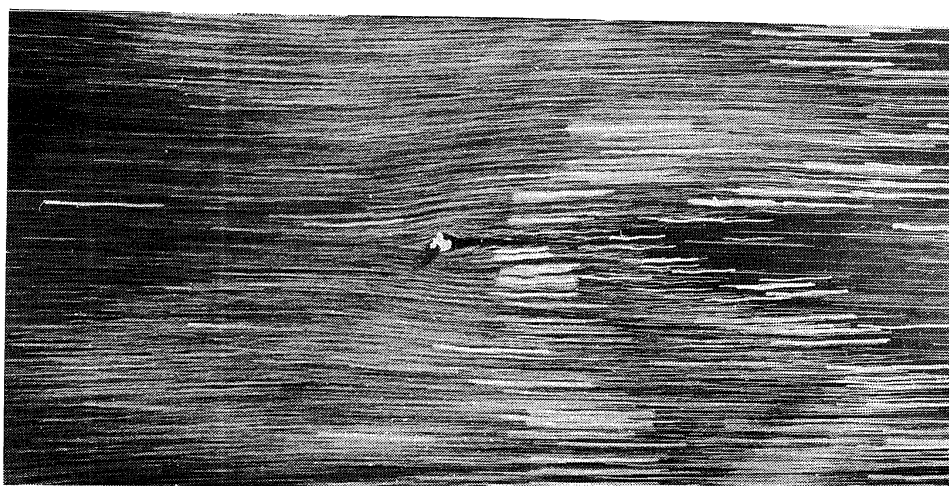


図2 流線が開いている流れ ($Q = 1.54$, $Re = 375$, $Rh = 20.8$)



図3 対称な渦対の流れ ($Q = 2.46$, $Re = 375$, $Rh = 20.8$)

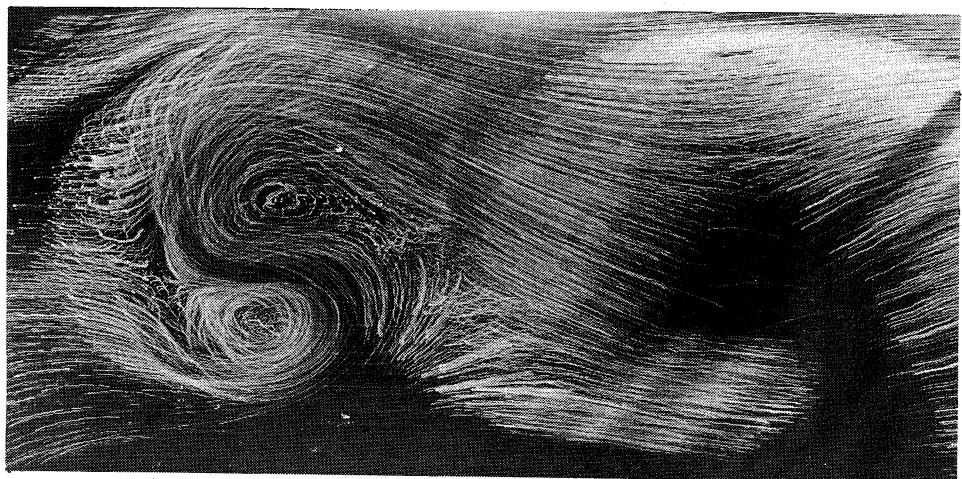


図4 周期的後流 ($Q = 7.29$, $Re = 375$, $Rh = 20.8$)

3. 数値計算

3-1. 基礎方程式

ここで示したような水槽では、作業流体に働くローレンツ力は鉛直方向の運動にはほとんど影響しない。また、水表面付近を観察する場合、永久磁石の磁場の到達距離の関係から、流体層の鉛直方向の厚さ（深さ）は、その水平方向への拡がりに比べて薄く（浅く）制限されることから、鉛直方向の流体の運動は水平方向のそれに比べて小さくなる。これらのことから、その運動は通常は二次元の現象として近似できる。しかしなが

ら、それでは水槽底面の摩擦の影響を考慮できない。そこで、水平流速の鉛直プロファイルは一様に二次関数であるという仮定のもとに準二次元近似^{2,3)}を行って誘導された水表面上の流体運動を記述する式

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = \frac{2\nu}{h^2} \mathbf{u}_s - \nu \nabla^2 \mathbf{u}_s + \frac{\mathbf{f}}{\rho} \quad (1)$$

を基礎方程式として用いた。座標は図5に示すような直交座標系を用いている。 u 、 v はそれぞれ x 、 y 方向の流速成分であり、 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} はそれぞれ x 、 y 方向への単位ベクトルである。 $\mathbf{u}_s(x, y, t) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ は水表面の水平流速ベクトル、 $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j}$ 、 ν

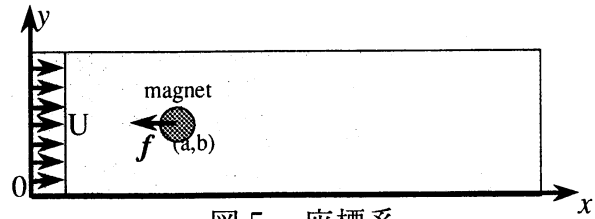


図5 座標系

は動粘性係数、 h は流体層の厚さ、 ρ は流体の密度であり、 \mathbf{f} は外力を示す。式(1)では、水表面の流体運動を考えているので圧力項は0となる。 \mathbf{f} については、体積力としてのローレンツ力のみを考える。流体運動と磁場生成のフィードバック機構は、作業流体の電気伝導度が小さいので考慮しない。磁石の中心の座標を (a, b) として、電流密度ベクトル \mathbf{J} と磁束密度ベクトル \mathbf{B} を実験の状況から、それぞれ $\mathbf{J} = -J_0\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{B} = B_0 \exp[-\{((x-a)/d)^2 + ((y-b)/d)^2\}] \mathbf{k}$ とおくと³⁾。

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} = -J_0 B_0 \exp[-\{((x-a)/d)^2 + ((y-b)/d)^2\}] \mathbf{i} \quad (2)$$

となる。ここで、 $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ 、 B_0 、 J_0 はそれぞれ水表面の磁束密度の最大値と電流密度である。式(1)に式(2)を代入して、 rot をとり、一様流の流速 U 、磁石の直径 d で無次元化すれば無次元渦度方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} \\ = \frac{\omega}{Rh} - \frac{\nabla^2 \omega}{Re} - 2Q \left(Y - \frac{b}{d} \right) \exp \left[- \left\{ \left(X - \frac{a}{d} \right)^2 + \left(Y - \frac{b}{d} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここで、 ω 、 ψ 、 τ 、 X 、 Y はそれぞれ無次元化された渦度、流れ関数、時間および座標である。式(3)にあらわれる3つの無次元パラメータは次のように定義されている。

$$Re = \frac{Ud}{\nu}, \quad Rh = \kappa \frac{Uh^2}{2\nu d}, \quad Q = \frac{J_0 B_0 d}{\rho U^2} \quad (4)$$

ここで、 κ は鉛直方向の流速プロファイルの2次関数からのずれを補正する係数である。 $\omega \equiv \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_s)$ 、 ψ は $(u, v) \equiv (\partial \psi / \partial y, -\partial \psi / \partial x)$ で、それぞれ定義されており ω と ψ の間には次のような関係がある。

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (5)$$

3-2. 計算条件

流れ場の計算は、式(3)と式(5)を差分近似して行った。式(3)の対流項には人工粘性を付加した3次精度風上差分(Kawamuraスキーム)で、それ以外の空間微分の項には2次精度の中心差分で近似を用い、時間微分の項は2次精度の中心差分(Crank-Nicolson法)で近似した。計算格子としては、図6に示すような磁石の中心に格子を集めた不等間隔の格子を用いた。磁石の無次元直径1に対して 60×20 の広さの計算領域は、 160×120 の格子に分割した、最小の格子幅は $\Delta x = 5.03 \times 10^{-2}$ 、 $\Delta y = 5.00 \times 10^{-2}$ で、時間きざみは $\Delta \tau = 1.00 \times 10^{-2}$ とした。本計算では、式(3)の時間積分に陰解法のスキームを使っており、また、式(5)はPoisson方程式なので、いずれの差分方程式を解く場合にも連立方程式を解かねばならない。これらの連立方程式の解法にはS.O.R法を用いた。境界条件は図6で示すように上流境界で一樣流の流入、下流境界で $\partial \psi / \partial x = 0$ 、 $\partial \omega / \partial x = 0$ 、壁面では一樣流を与えており、壁面からの渦度の発生は考慮していない。初期条件としては一樣流のみの場を与えた。また、 Rh の係数 κ は、Dolzanskii et al⁴⁾に倣って、 $\kappa = 1.7$ とした。

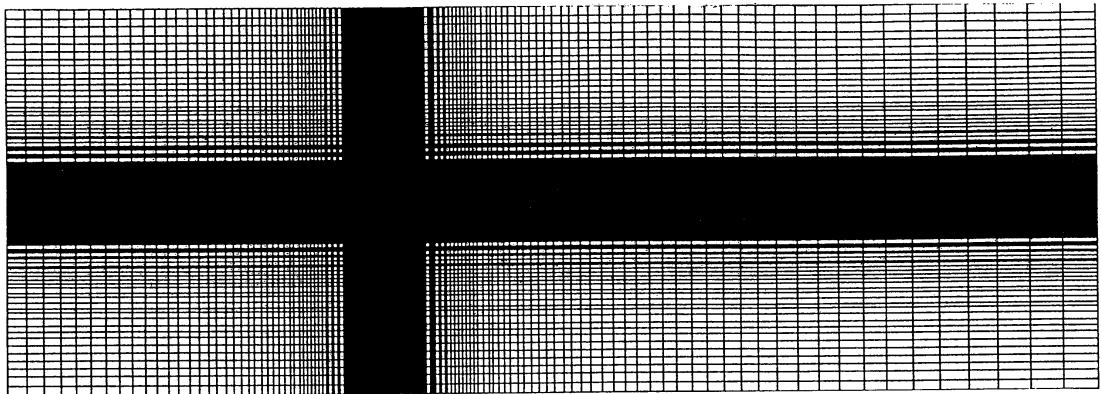


図6 計算格子

3-3. 計算結果と考察

前節で述べた条件のもとで、いくつかの Re と Q のパラメータ値を組み合わせる計算を行った。最初に可視化実験の図 2、3 に対応する流れの計算結果を図 7、8 に示す。これらの流れは、フローパターンからも、ほぼ定常かつ対称な流れとみなせる。次の図 9 に示す流れは非対称で非定常ながら、渦対の下流に渦を放出していないパターンである。この渦対は無次元周波数 0.024 程度で振動している。

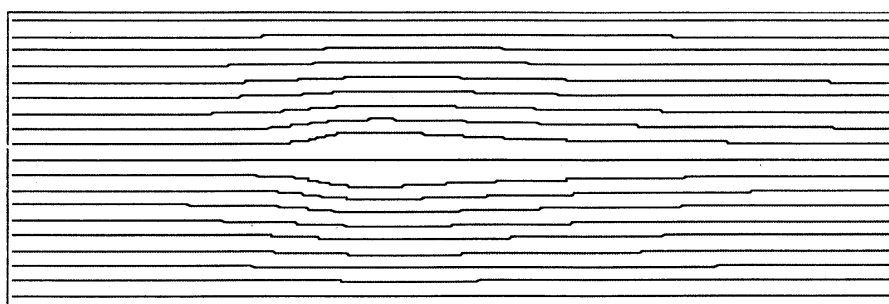


図 7 流線が開いている流れ ($Q = 1$, $Re = 1000$, $Rh = 24$, $\tau = 450$)

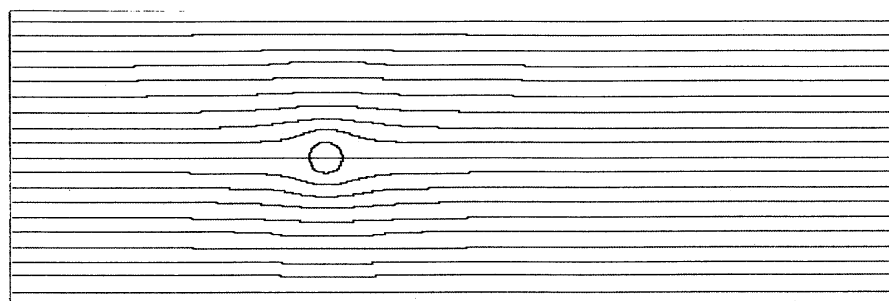


図 8 対称な渦対の流れ ($Q = 10$, $Re = 30$, $Rh = 7.6$, $\tau = 450$)

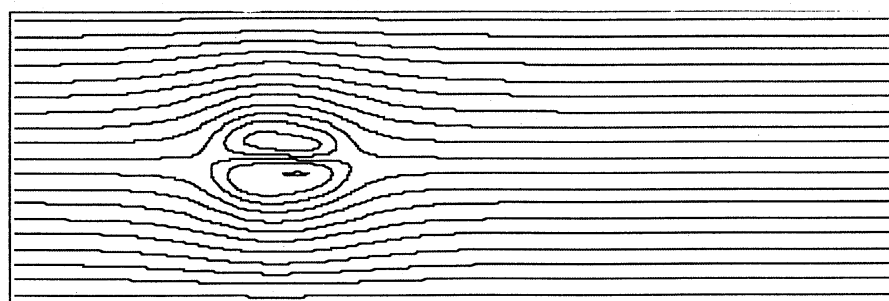


図 9 非対称な渦対の流れ ($Q = 15$, $Re = 150$, $Rh = 3.6$, $\tau = 450$)

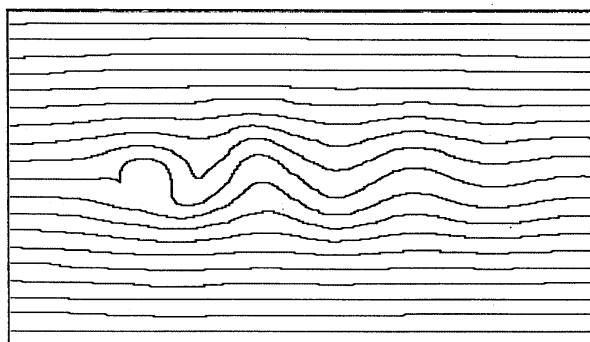
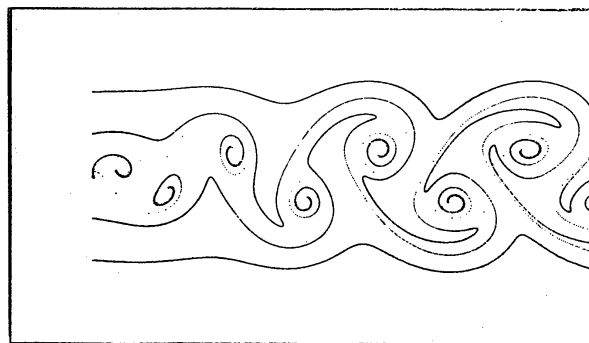
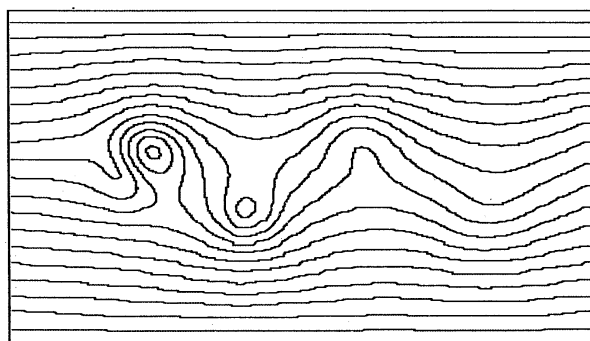
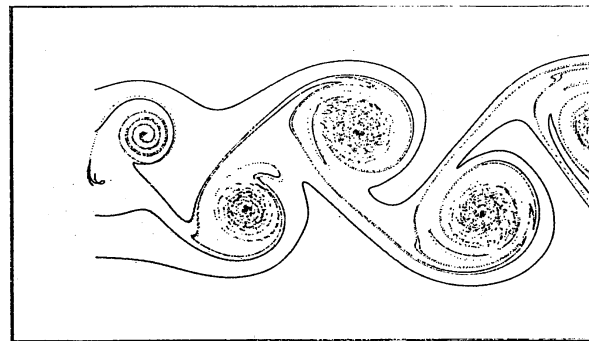
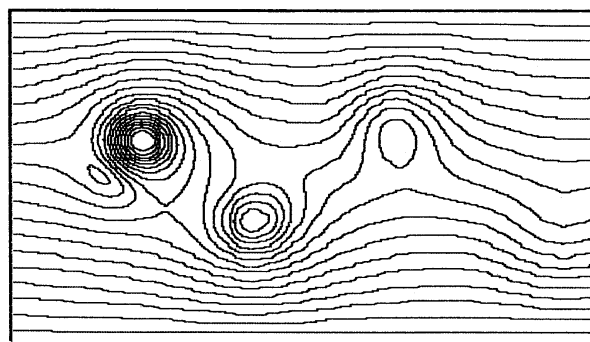
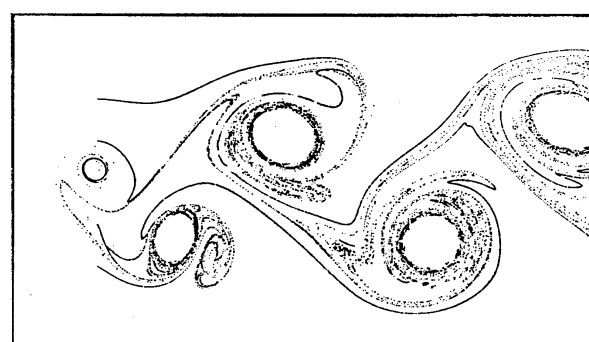
 $(Q = 2)$  $(Q = 2)$  $(Q = 5)$  $(Q = 5)$  $(Q = 10)$  $(Q = 10)$

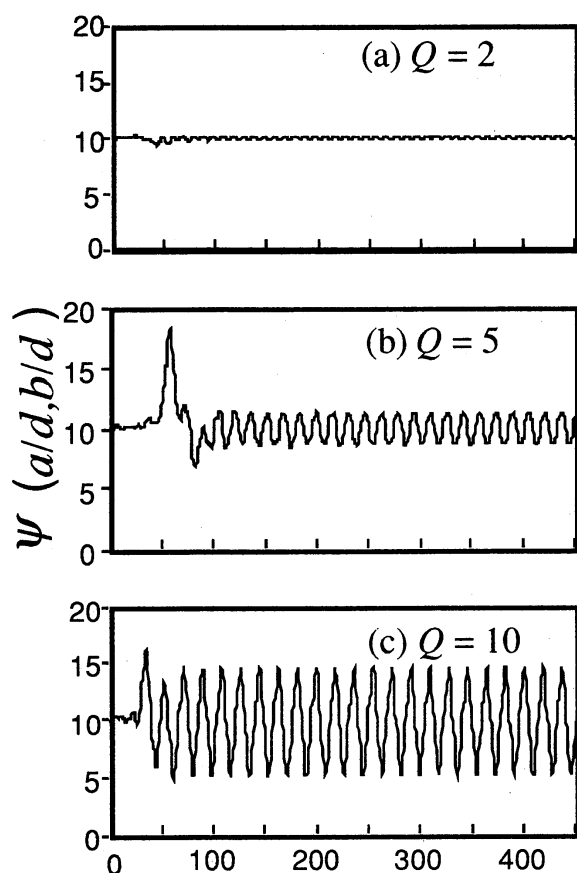
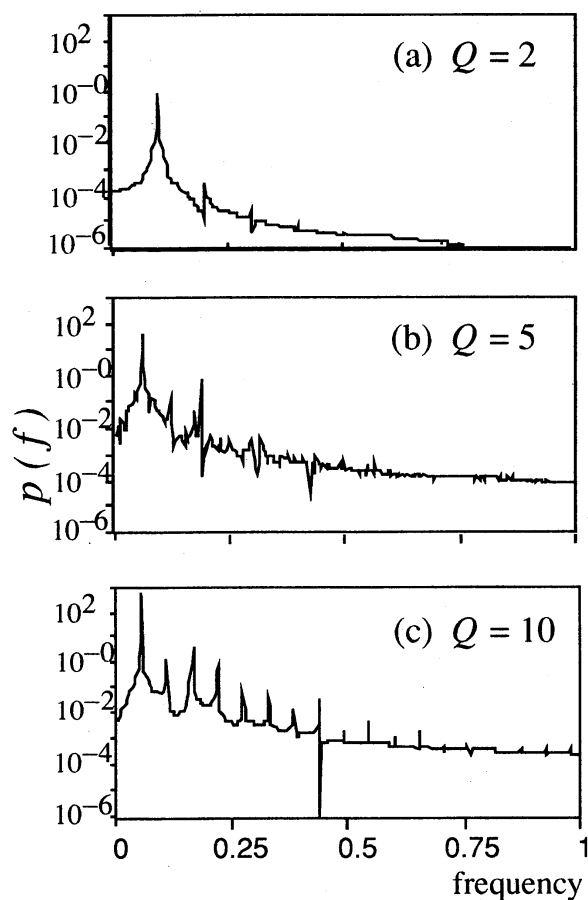
図10 瞬間流線図

 $(Re = 1000, Rh = 24, \tau = 45000)$

図11 流脈線図

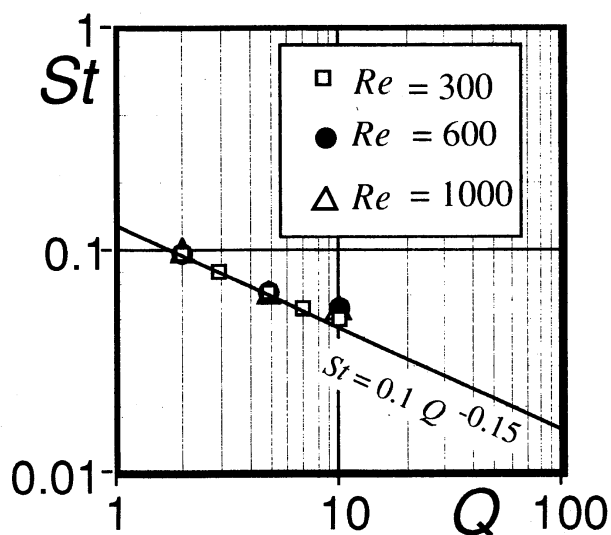
 $(Re = 1000, Rh = 24, \tau = 45000 \sim 50000)$

図10、11は周期的後流が形成されるフローパターンを示しており、 $Re = 1000$ に固定し、 Q の値を変化させて計算した結果である。この図より、 Q の増加とともに形成される渦が大きくなり、後流の振幅も増加することがわかる。図11は、磁石の中心付近に、

図12 ψ の時系列データ図13 ψ のパワースペクトル

流れの横断方向に置かれた5カ所の点から粒子を流して描いた流脈線図である。 $Q=10$ のケースでは、後流を形成する渦には粒子が入ってこないバブル状の領域が存在する。それに対して他のケースでは、渦の内部にまで粒子が入り込んできていることがわかる。この場合、渦の内部にある粒子は磁石中心上から放出された粒子で構成され、少なくともこの計算の領域内では、渦に閉じこめられている。 $Q=10$ の場合も、渦の中心の空洞部分を縁取っているのは磁石の中心から放出された粒子である。

次に、渦の放出される周期を調べるため

図14 St の Q 依存性

に、磁石の中心の座標 $(X, Y) = (a/d, b/d)$ における無次元流れ関数 $\psi(a/d, b/d)$ の時系列データを取り (図 12)、それを F.F.T. にかけることによって ψ のパワースペクトル $P(f)$ (図 13) を求めた。 $P(f)$ のピーク値より ψ の無次元卓越周波数を算定した。この無次元卓越周波数をストローハル数 (St) と定義した。同様に $Re = 300$ 、 $Re = 600$ の場合についても解析を行い、それぞれの St を算出した。その結果を図 14 に示す。図 14 によれば、 Re が変化しても、 St はほとんど影響を受けない。このことは、Honji & Haraguchi²⁾ の水槽実験の結果と定性的に一致している。しかしながら Q については、 St が Q の増加とともに減少し、その関係は $St = 0.1Q^{-0.15}$ で与えられる。

4. まとめ

ローレンツ力によって駆動される周期的後流の性質について実験および数値計算により調べた。今回、このような流れの渦の放出周期は、レイノルズ数による影響よりも、注入される外力に大きく依存することがわかった。カルマン渦列の場合も、渦の放出の周期はレイノルズ数にあまり依存しないことが知られており、この点に関してはカルマン渦列の性質に類似している。また、周期的後流が生じない渦対だけの振動については今回あまり調べていないが、流体力学的に興味深い現象であると思われる。

参考文献

- 1) H. Honji : Wavy wake formation in the absence of submerged bodies in electrolyzed salt water, J. Phys. Soc. Jpn. 60,4(1991) 1151-1164
- 2) H. Honji & Y. Haraguchi: Electrolytically-induced quasi-two-dimensional vortex pairs, J. Phys. Soc. Jpn. 64,7(1995) 2274-2277
- 3) 池畑義人、本地弘之、杉原裕司：ローレンツ力による周期渦列の形成、第 27 回乱流シンポジウム講演論文集 (1995) 303-306
- 4) 村上洋一：準二次元流の安定性、ながれ 13 (1994) 115-123
- 5) F. V. Dolzhanskii, V. A. Krymov & D. Yu. Manin: An advanced experimental investigation of quasi-two-dimensional shear flows, J. Fluid Mech. 241(1992) 705-722